

7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

7.6. Ejercicios complementarios

1. Para cada una de las siguientes superficies, calcula vectores tangentes y normal (determinando su regularidad) y, si es posible, esboza su gráfica:

$$(a) \Phi(r, \theta) = (a^2 r \cos \theta, b^2 r \sin \theta, r^2) \quad (b) \Phi(r, \theta) = (a^2 r \cos \theta, b^2 r \sin \theta, r)$$

2. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$ en el punto $u = v = 1$.

3. Halla el área de las siguientes superficies:

(a) La parte del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 2az$, $a > 0$, en el primer octante.

(b) La parte del plano $x + y + z = 1$ interior al cilindro $2x^2 + 3y^2 = 6$.

4. Calcula la integral de las siguientes funciones escalares sobre la superficie que se indica:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, sobre el helicoido $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$, $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) $f(x, y, z) = z$, sobre la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) $f(x, y, z) = z^2$, sobre la frontera del cuadrado unidad $[0, 1]^3$.

5. Calcula la masa y el centro de gravedad de una placa con la forma del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, si la densidad puntual es constante δ_0 .

6. Calcula la integral de $F(x, y, z) = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$ sobre la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, con la normal apuntando hacia el exterior.

7. Calcula $\int_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma$, si $F(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

8. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia intensa) se describe con el campo vectorial $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Halla el flujo total a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) La lluvia se desvía lateralmente por un fuerte viento, de manera que cae con un ángulo de 45° , lo que se describe con el campo vectorial $F(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

9. Comprueba que se verifica el teorema de Stokes para las siguientes funciones y superficies:

(a) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

(b) $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, y S el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

10. Calcula $\iint_S \text{rot } F d\sigma$ en los siguientes casos:

(a) $F(x, y, z) = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$, y S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$.

(b) $F(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$, y S el semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$, $z \geq 0$.

(c) $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$, y la superficie:

$$S = S_1 \cup S_2 \quad \text{donde:} \quad \begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\} \end{cases}$$

11. Estudia si es conservativo el campo vectorial $F(x, y, z) = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. En caso afirmativo, halla una función potencial y la integral de F sobre la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}})$, $0 \leq t \leq 1$.

- 12.** Calcula la integral de F sobre la frontera de Ω con vector \mathbf{n} orientado hacia afuera, en los siguientes casos:
- (a) $F(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$, y $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- (b) $F(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, y $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- 13.** Sea F un campo vectorial diferenciable dos veces con continuidad y S una superficie cerrada a la que se le puede aplicar el teorema de Gauss. Demuestra que $\iint_S \text{rot } F \, d\sigma = 0$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

- 1.** (a) $\mathbf{T}_r = (a^2 \cos \theta, b^2 \sin \theta, 2r)$, $\mathbf{T}_\theta = (-a^2 r \sin \theta, b^2 r \cos \theta, 0)$;
 (b) $\mathbf{T}_r = (a^2 \cos \theta, b^2 \sin \theta, 1)$, $\mathbf{T}_\theta = (-a^2 r \sin \theta, b^2 r \cos \theta, 0)$.
- 2.** $x + y + z = 4$.
- 3.** (a) $2a^2$; (b) $3\sqrt{2}\pi$.
- 4.** (a) $\frac{8\pi}{3}$; (b) $\frac{\pi}{12} (5\sqrt{5} + \frac{1}{5})$; (c) $\frac{7}{3}$.
- 5.** $\frac{\pi\delta_0 R^2}{2}$; $G(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2})$.
- 6.** 2π .
- 7.** 0.
- 8.** (a) π ; (b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
- 9.** (a) 0; (b) 0.
- 10.** (a) 0; (b) -16π ; (c) 0.
- 11.** F es conservativo; $f(x, y, z) = e^x \sin y + \frac{z^3}{3}$; $e \sin 1 + \frac{e^3 - 1}{3}$.
- 12.** (a) 4π ; (b) $\frac{12\pi}{5}$.
- 13.** Aplica el teorema de Gauss a la integral del rotacional y comprueba que su divergencia es cero.